Exercice 1. Une forme bilinéaire $\alpha : V \times V \to \mathbb{K}$ est dite *symétrique* si $\alpha(y,x) = \alpha(x,y)$ pour tous $x, y \in V$. Elle est *antisymétrique* si $g(y,x) = -g(x,y)$ pour tous $x, y \in V$.

1. Montrer que toute forme bilinéaire sur V s'écrit de façon unique comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinaire antisymétrique.
   Dans cet exercice, on suppose que le corps K n'est pas de caractéristique 2, rappelons que cela veut dire que $1 + 1 \neq 0$ (par exemple, le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$ est exclus).
2. Que peut-on dire de la matrice de Gram d'une forme bilinéaire symétrique ? Et d'une forme bilinéaire antisymétrique ? (Ici on suppose que $\dim(V) < \infty$.)
3. La réponse à la question précédente dépend-elle de la base choisie ?

Exercice 2. (a) Prouver qu'une forme bilinéaire ω sur un espace vectoriel réel V est antisymétrique si et seulement si

$$\omega(x,x) = 0, \quad \forall\, x \in V.$$

(Lorsque cette propriété est satisfaite, on dit que la forme bilinéaire ω est *alternée*).

(b) La propriété (a) est elle vraie si V est un espace vectoriel sur un corps quelconque $\mathbb{K}$?

Exercice 3. Montrer que, pour tous vecteurs u, v dans un espace vectoriel V muni d'un produit scalaire, on a les formules suivantes

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right),$$
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u-v\|^2\right),$$
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

Ces formules s'appellent les *formules de polarisation.* Elles impliquent en particulier que la norme détermine le produit scalaire.

Exercice 4. Soient V un espace euclidien et $v_1, \ldots, v_n \in V$ des vecteurs non nuls 2 à 2 orthogonaux (c'est-à-dire $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ si $i \neq j$).

a) Montrer le théorème de Pythagore généralisé : $\|v_1 + \cdots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2$
b) Montrer que les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.

Exercice 5.
1. Démontrer que dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont orthogonales. (Rappelons qu'un losange est un parallélogramme dont les quatre côtés ont la même longueur.)
2. Démontrer que pour tout parallélogramme $ABCD$ dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, la somme des carrés des diagonales est le double de la somme des carrés des côtés, c'est-à-dire,
$$d(A,C)^2 + d(B,D)^2 = 2\left(d(A,B)^2 + d(A,D)^2\right).$$
3. Expliquer pourquoi cet énoncé est équivalent au théorème de Pythagore.

Exercice 6.
1. Montrer que
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x\sin(x)}dx \leq \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} = 1,312\cdots$$
2. En utilisant une inégalité du cours, améliorer cette borne en
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x\sin(x)}dx \leq \frac{\pi}{\sqrt{8}} = 1,110\cdots$$

Remarque 1. Une estimation numérique montre que
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{x\sin(x)}dx = 1.108\cdots$$
et la seconde estimée est assez bonne. L'intégrale étant équivalente à une intégrale elliptique, on ne peut pas la calculer à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 7. On note $\mathrm{O}(n) = \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \cap \{A : A \cdot A^t = \mathrm{I}_n\}$. Un élément de $\mathrm{O}(n)$ s'appelle une *matrice orthogonale* de taille n.
1. Prouver que $\mathrm{O}(n)$ est un groupe pour la multiplication matricielle (on l'appelle le *groupe orthogonal*).
2. Vérifier que pour toute matrice antisymétrique $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $B = (\mathrm{I}_n + A)(\mathrm{I}_n - A)^{-1}$ est orthogonale.
On dit que la matrice orthogonale B est la *transformée de Cayley de la matrice antisymétrique* A.
3. Calculer la transformée de Cayley de $A = \begin{pmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 8. Jordaniser la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. (a) Soit $-\infty < a < b < \infty$ et $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Montrer qu'il existe des « poids » $m_0, m_1, \ldots m_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_a^b P(x)dx = \sum_{k=0}^{n} m_k P(x_k),$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus n.

(b) La propriété (a) contredit-elle la solution de l'exercice 8.8(d) ?

(c) Supposons que $[a, b] = [0, 2]$, que $n = 2$ et que la subdivision soit données par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$. Calculer dans ce cas les poids m_0, m_1, m_2.